

2025 年全国高考名校名师联席命制
数学信息卷(一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	B	A	C	B	D	D	B	D	BC	AD	ACD	$(-\infty, -1]$	-11	$(\frac{36}{5}, \frac{48}{5})$

试做分析

一、整体情况

本卷组织湖北孝感中学 113 名学生参与试做,试卷整体难度度中等偏上,梯度明显.从内容上看,试题新颖度高,避免了偏题、怪题.试卷平均得分为 89.2 分,得分 130 分及以上占 2%,100~130 分占 11%,80~100 分占 46%,80 分以下占 41%.

二、选择题

第 6 题以沙漏为载体,类比相似三角形的知识,考查圆台的体积等问题;第 7 题以实际应用为背景,考查直线与圆的位置关系,题型新颖,设问巧妙;第 8 题得分不高,原因是难度较大,对学生的思维能力要求较高;第 10 题 C 选项涉及三角函数在区间内无最大值,条件转换不顺利导致出错.

三、填空题

填空题整体上难度度适中,失分题目主要是第 14 题,错因是不能灵活运用对称中心不在原点的双曲线的几何性质.

四、解答题

第 18 题的失分原因是不能灵活转化导致无法找到几何关系式;第 19 题的错因是无法准确运用归纳猜想找到规律,导致失分.

1. B 【热点】复数的乘法运算、复数的模

【深度解析】由题可得, $(1+i)z=2+2i-i+1=3+i$, 其模等于 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 故选 B.

一题多解 $|(1+i)z|=|1+i|\cdot|z|=\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$. 故选 B.

2. A 【热题】充分条件和必要条件的判断、对数函数与幂函数的性质

【深度解析】若命题 p 为真,则 $0<x<1$;若命题 q 为真,则 $x<1$. 所以由 p 可以推出 q , 由 q 不可以推出 p , 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

3. C 【热点】等差数列的通项公式

【深度解析】因为 $a_n+a_{n+1}=6n+1$, 所以 $a_{n+1}+a_{n+2}=6n+7$, 两式相减可得 $a_{n+2}-a_n=6$, 所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d=3$. 所以 $a_n=a_1+3(n-1)$, 则 $a_{n+1}=a_1+3n$, 故 $a_n+a_{n+1}=6n+2a_1-3$, 所以 $2a_1-3=1$, 解得 $a_1=2$. 故选 C.

快解 (特殊值法) 当 $n=1$ 时, $a_1+a_2=7$; 当 $n=2$ 时, $a_2+a_3=13$. 两式相减可得 $a_3-a_1=6$, 所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d=3$, 则 $a_2=a_1+3$, 代入 $a_1+a_2=7$ 中, 解得 $a_1=2$. 故选 C.

一题多解 (基本量法) 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则 $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_{n+1}=a_1+nd$, 所以 $a_n+a_{n+1}=a_1+(n-1)d+a_1+nd=2a_1+(2n-1)d=2dn+2a_1-d$, 所以 $2dn+2a_1-d=6n+1$, 所以 $\begin{cases} 2d=6, \\ 2a_1-d=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=2, \\ d=3. \end{cases}$ 故选 C.

4. B 【热点】频率分布直方图

【深度解析】因为 $2\times0.005\times10+0.010\times10+0.015\times10+2a\times10+0.025\times10=1$, 解得 $a=0.02$, 分数在 $[110, 120]$ 内的人数为 $800\times0.005\times10=40$, 分数在 $[100, 110]$ 内的人数为 $800\times0.02\times10=160$, 所以录取分数线在区间 $[100, 110]$ 内. 设录取分数线为 X 分, 则 $0.02\times(110-X)+0.005\times10=\frac{72}{800}=0.09$, 解得 $X=108$. 故选 B.

一题多解 (排除法) 分数不低于 110 分的人数为 $800\times0.005\times10=40$, 排除 C, D. 分数在 $[100, 110]$ 内的人数是分数在 $[110, 120]$ 内的人数的三倍以上, 即分数在 $[100, 110]$ 内的人数大于 120, 因此估计分数不低于 105 分的人数大于 $60+40=100$, 排除 A. 故选 B.

5. D 【热题】利用函数的奇偶性求参数、利用函数的单调性解不等式

【深度解析】因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-1)=f(1)$, 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b$, 即 $\frac{a+b}{ab}=a+b$. 因为 $a+b>0$, 所以 $ab=1$, 所以 $f(x)=a^x+a^{-x}$, 所以不等式 $f(x)<a+b=a+a^{-1}$, 即 $f(x)<f(1)$. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=(a^x-a^{-x})\ln a=\frac{(a^{2x}-1)\ln a}{a^x}=\frac{(a^x+1)(a^x-1)\ln a}{a^x}$, $a^x>0, a^x+1>0$. 当 $a>1$ 时, $a^x-1>0, \ln a>0$, 所以 $f'(x)>0$; 当 $0<a<1$ 时, $a^x-1<0, \ln a<0$, 所以 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 由

评分细则

高分关键

复数模的性质: $|z_1z_2|=$

$|z_1||z_2|$

失分注意

判断数集的充分必要条件时, 大范围不可以推小范围, 小范围可以推大范围

高分关键

根据数列的递推公式可以求得公差

高分关键

已知数列为等差数列, 则可以对 n 进行赋值, 只利用前 3 项求解公差 d , 进而求解 a_1

高分关键

正确书写计算式, 可类比于在频率分布直方图中求中位数的计算公式

高分关键

由 $f(x)$ 为偶函数, 找到 a 和 b 的关系式

高分关键

将不等式转化为函数值的大小关系, 进一步将问题转化为判断函数单调性, 从而判断自变量的取值范围

$f(x) < f(1)$, 得 $|x| < 1$, 解得 $-1 < x < 1$. 故选 D.

一题多解 (特殊值法) 由题知 $f(-x) = f(x)$, 则 $a^x + b^x = a^{-x} + b^{-x}$, 整理可得 $a^x b^x = 1$, 解得 $ab = 1$. 令 $a = 2$, 则 $b = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, 由偶函数图象关于 y 轴对称, 排除 A, B, 又 $f(2) = 4 + \frac{1}{4} > 2 + \frac{1}{2}$, 排除 C. 故选 D.

6. D 【热情境】圆锥、圆台的结构特征

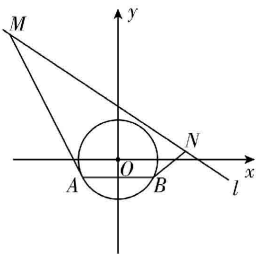
【深度解析】 由题可得, 根据相似比, 细沙的体积占圆锥容器体积的 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, 即细沙堆成的圆台的体积占圆锥容器体积的 $\frac{1}{8}$, 所以圆台上方的空白小圆锥体积占圆锥容器体积的 $\frac{7}{8}$, 因此圆台上方的空白小圆锥的高为 $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}h = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$, 则圆台的高为 $\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)h$. 故选 D.

一题多解 设圆锥的底面半径为 r , 圆台的上底面半径为 r' , 圆台的高为 h' . 由相似比可得, $\frac{r'}{r} = \frac{h-h'}{h}$, 即 $r' = \frac{h-h'}{h}r$. 所以 $\frac{1}{3}\pi r'^2(h-h') + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, 所以 $\frac{(h-h')^3}{h^2} + \frac{h}{8} = h$, 整理得 $(h-h')^3 = \frac{7}{8}h^3$, 即 $h-h' = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$, 所以 $h' = \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)h$. 故选 D.

情境应用 新高考数学考试中各种新情境层出不穷, 解答情境试题需要提取关键词, 找到破题点才能顺利解题. 本题考查沙漏(圆锥)中细沙下落之后, 摇匀形成圆台, 通过体积恒等计算得出圆台的高.

7. B 【热素材】直线与圆的位置关系

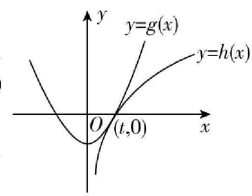
【深度解析】 如图, 以圆心 O 为原点, 平行于 AB 的直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 则圆 $O: x^2 + y^2 = 5$, 点 $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$. 根据题意设直线 $l: 2x + 3y + c = 0$, 由圆心 O 到直线 l 的距离为 $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ 百米, 得 $\frac{|c|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$, 解得 $c = \pm 9$. 因为直线 l 与 AB 分别在圆心 O 两侧, 所以 $c = -9$, 故直线 l 的方程为 $2x + 3y = 9$. 易知以 A 为切点的切线方程是 $-2x - y = 5$, 以 B 为切点的切线方程是 $2x - y = 5$, 当 $|MN|$ 最小时, 由 $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(-6, 7)$, 由 $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow N(3, 1)$, 此时 $|MN| = \sqrt{81 + 36} = 3\sqrt{13}$ (百米). 故选 B.



8. D 【热风向】函数的零点、恒成立问题

思路导引 $g(x) = x^2 - a$, $h(x) = 3\ln x + x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\xrightarrow{g(x)h(x) \geq 0} g(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点 $x = t (t > 0) \rightarrow a = t^2, b = 3\ln t + t \rightarrow a - b = t^2 - 3\ln t - t \rightarrow$ 设 $\varphi(t) = t^2 - 3\ln t - t \xrightarrow{\text{求导}} \varphi'(t)$ 的单调性与最小值 $\rightarrow a - b$ 的最小值

【深度解析】 由题可得, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(x) = (x^2 - a) \cdot (3\ln x + x - b) \geq 0$, 则函数 $g(x) = x^2 - a$ 和 $h(x) = 3\ln x + x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上符号相同, 又 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以若 $g(x)h(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $g(x)$ 与 $h(x)$ 一定会有相同的零点 $x = t (t > 0)$, 即 $t^2 - a = 0$, $3\ln t + t - b = 0$, 即 $a = t^2, b = 3\ln t + t$, 所以 $a - b = t^2 - 3\ln t - t$. 设 $\varphi(t) = t^2 - 3\ln t - t (t > 0)$, 则 $\varphi'(t) = 2t - \frac{3}{t} - 1$. 令 $\varphi'(t) = 0$, 解得 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = -1$ (舍). 令 $\varphi'(t) > 0$, 解得 $t > \frac{3}{2}$, 所以函数 $\varphi(t)$ 在 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增; 令 $\varphi'(t) < 0$, 解得 $0 < t < \frac{3}{2}$, 所以函数 $\varphi(t)$ 在 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $\varphi(t)_{\min} = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - 3\ln \frac{3}{2}$, 即 $a - b$ 的最小值为 $\frac{3}{4} - 3\ln \frac{3}{2}$. 故选 D.



风向解读 在 2024 年全国新课标 II 卷第 8 题出现了对不等式恒成立问题的考查, 与本题有相似之处. 观察题目, 可以看作两个函数相乘大于或等于 0 恒成立, 解答题目时, 可以将原问题转化为两函数共零点的问题, 利用数形结合思想解题, 体现新高考试题多思少算的命题思想.

试做反馈 本题错选率 33.7%, 易错选项均匀分布, 因为题目思维量较大, 所以在解问题时难以找到有效信息.

失分注意

容易将相似空间几何体的体积比与相似平面图形的面积比混淆, 体积比为相似比的立方

高分关键

圆台上部空白小圆锥的体积与细沙所在圆锥的体积之和等于圆锥的体积

高分关键

根据直线 l 与 AB 所在直线所成的夹角的正切值为 $\frac{2}{3}$, 可以得到直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$

高分关键

正确写出圆在点 A 和 B 处的切线方程

失分注意

本题容易忽视函数的定义域

高分关键

将问题转化为两个函数有相同的零点

高分关键

构造用同一参数表示的 $a - b$ 的函数, 利用导数判断函数在定义域内的单调性求最值

9. BC 【热考点】向量的数量积运算、向量共线与垂直、向量的夹角、单位向量

【深度解析】对于 A, 因为 $\mathbf{a}=(-1,2)$, $\mathbf{b}=(3,4)$, 所以 $-1 \times 4 - 2 \times 3 = -10 \neq 0$, 故 A 错误;

对于 B, 由题知 $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(4,2)$, 所以 $(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 4 \times (-1) + 2 \times 2 = 0$, 所以 $(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \perp \mathbf{a}$, 故 B 正确;

对于 C, 由题知 $|\mathbf{a}|=\sqrt{5}$, 所以与 \mathbf{a} 同向的单位向量为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 故 C 正确;

对于 D, $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-1 \times 3 + 2 \times 4}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 D 错误. 故选 BC.

10. AD 【热考点】正弦型三角函数的图象与性质

【深度解析】对于 A, 由题可得, 因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的两个解, $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$,

所以令 $\omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}$, 两式相减可得, $\omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega = 2$, 故 A 正确.

对于 B, 因为 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 且 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 故 B 错误.

对于 C, 令 $t = 2x + \varphi$, 则当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $t \in \left(\varphi, \varphi + \frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 内无最大值, 所以

$$y = \sin t \text{ 在 } \left(\varphi, \varphi + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 内无最大值, 由正弦函数的图象易知, } \begin{cases} \varphi > -\frac{\pi}{2}, \\ \varphi + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{6}, \text{ 故}$$

C 错误.

对于 D, 令 $t = 2x + \varphi$, 则当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $t \in (\varphi, \varphi + \pi)$. 当 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ 时, $\frac{\pi}{2} < \varphi + \pi < \pi$, 此时 $y =$

$\sin t$ 在 $t \in (\varphi, \varphi + \pi)$ 内有且仅有一个零点 $t = 0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个零点;

当 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时, $\pi < \varphi + \pi < \frac{3\pi}{2}$, 此时 $y = \sin t$ 在 $t \in (\varphi, \varphi + \pi)$ 内有且仅有一个零点 $t = \pi$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个零点, 即为其对称中心, 故 D 正确. 故选 AD.

一题多解

对于 A, 当 $\omega = 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$ 的解 x_1, x_2 满足 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 故 A 正确;

对于 B, 由 A 可知, 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 所以其对称轴满足 $2x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\varphi = -2x + \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 因为 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 当 $k = 0$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 故 B 错误.

对于 C, 当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时, 由 A 可知 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 内无最大值, 故 C 错误, 后同上.

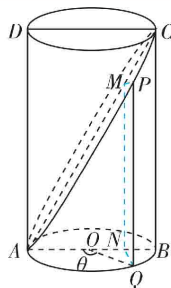
11. ACD 【热趋势】立体几何与三角函数、圆锥曲线的综合

【深度解析】对于 A, 因为 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4$, 所以 $2a = 4$, 即 $a = 2$. 由题意知, $2b = AB = 2$, 即 $b = 1$, 所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, 椭圆 E 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 A 正确;

对于 B, 以 AC 为直径的圆上的点都在椭圆外 (不包括 A, C), 所以不存在点 P, 使得 $PA \perp PC$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $PQ \parallel CB$, $CB \subset$ 平面 ABCD, $PQ \not\subset$ 平面 ABCD, 所以 $PQ \parallel$ 平面 ABCD, 所以点 P 到平面 ABCD 的距离等于点 Q 到平面 ABCD 的距离, 因为平面 ABCD \perp 底面, 且交线为 AB, 所以点 Q 到平面 ABCD 的距离等于点 Q 到直线 AB 的距离, 为 $|\sin \theta|$, 故 C 正确;

对于 D, 如图, 过点 P, Q 分别作平面 ABCD 的垂线, 垂足 M, N 分别在 AC, AB 上, 连接 MN, 在



失分注意

理解单位向量的概念, 若 $\mathbf{a}=(x,y)$ (\mathbf{a} 不为零向量), 则与 \mathbf{a} 同向的单位向量为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} =$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ 与 } \mathbf{a} \text{ 反}$$

向的单位向量为 $-\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} =$

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

高分关键

根据 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的两个解差的绝对值的最小值, 可知 x_1 和 x_2 相邻, 且在同一周期内

高分关键

换元, 利用新元的范围解决最值问题, 零点个数问题同此方法

高分关键

分类讨论当 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$

和 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点个数问题

信息卷 (一)

高分关键

对于 A 选项, 给出 ω 的取值, 直接代入解析式进行验证, 可以快速判断正误

高分关键

圆的直径所对的圆周角为直角, 故满足 $PA \perp PC$ (AC 为圆的直径) 的 P 点一定在圆上 (除 A, C 之外), 又椭圆和圆的交点仅有 A, C 两点, 所以不存在点 P, 满足 $PA \perp PC$

高分关键

确定 P, Q 两点到平面 ABCD 的距离相等, 在位置关系中, 平行最为直观的证明距离相等的方法

Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $PQ = MN = \sqrt{3}AN = \sqrt{3}(1 - \cos \theta)$, 又 $x = \theta \cdot OA = \theta$, 故 D 正确. 故选 ACD.

关键点拨 对于 A, 由 $2a = AC, 2b = AB$ 求出 a 和 b ; 对于 B, 判断以 AC 为直径的圆与椭圆是否存在交点(端点 A, C 除外); 对于 C, 点 P 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 Q 到平面 $ABCD$ 的距离, 等于点 Q 到直线 AB 的距离; 对于 D, 根据 $PQ = MN = \sqrt{3}AN, x = \theta$ 可得结果.

趋势预测 模块融合考查是新高考命题的一大趋势, 模块融合题目在知识的交汇处命题, 难度适中, 背景简单易懂, 但综合性强, 考查知识迁移运用能力. 本题中涉及的知识点有立体几何中的线面位置关系、三角函数的定义以及圆锥曲线的几何性质等, 解题时需要注意对各部分知识的把握.

试做反馈 本题易错选 B, 漏选 D. 对于探究性问题, 一般会直接默认存在, 故做题时直接选择 B; D 选项需要根据几何图形特点以及边长关系, 找到 PQ 的表达式, 但对扇形弧长公式记忆不清, 导致失分.

12. $(-\infty, -1]$ 【热题型】由集合间的关系求参数的范围

【深度解析】 由 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \emptyset$, 得 $A \subseteq B$. 因为 $A = \{x | -1 < x < 3\}, B = \{x | x > m\}$, 所以 $m \leq -1$.

13. -11 【热考点】二项展开式中特定项的系数

【深度解析】 依题意, a_1 为展开式中 x 项的系数, 故当 $(2+x)$ 中选取 2 时, $(1-x)^6$ 中选 x 项, 此时为 $2C_6^1 \times 1^5 \times (-x)^1 = -12x$; 当 $(2+x)$ 中选取 x 时, $(1-x)^6$ 中选常数项, 此时为 $xC_6^0 \times 1^6 \times (-x)^0 = x$, 故 $a_1 = -12 + 1 = -11$.

快解 两边同时对 x 求导, 得 $(1-x)^6 - 6(2+x)(1-x)^5 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 7a_7x^6$, 令 $x = 0$, 得 $1 - 12 = a_1$, 即 $a_1 = -11$.

14. $(\frac{36}{5}, \frac{48}{5})$ 【热风向】双曲线的定义与圆的性质的综合

思路导引

双曲线 C' 的实轴长为 2 $\xrightarrow{C' \text{ 的离心率最大}} |OF|$ 最大
 双曲线定义 $\rightarrow |AF| - |AO| = 2 \rightarrow |AF| = 7$ 或 $|AF| = 3 \rightarrow$ 点 F 的轨迹 $\rightarrow |OF| \leq 12$ 或 $|OF| \leq 8$ $\left\{ \begin{array}{l} |OF|_{\max} = 12 \rightarrow \text{点 } F \text{ 在} \\ \rightarrow OA \text{ 的延长线上} \rightarrow \text{利用} \\ \text{相似比求点 } F \text{ 的坐标} \end{array} \right.$

【深度解析】 由题意知, 新双曲线 C' 的实轴长为 2. 若 C' 的离心率最大, 则 $|OF|$ 最大. 由双曲线定义可知, $||AF| - |AO|| = 2a = 2$, 又 $|AO| = 5$, 所以 $|AF| = 7$ 或 $|AF| = 3$, 所以点 F 在以 A 为圆心, 7 为半径的圆上, 或者点 F 在以 A 为圆心, 3 为半径的圆上, 故 $|OF| \leq |OA| + 7 = 12$, 或 $|OF| \leq |OA| + 3 = 8$, 所以 $|OF|_{\max} = 12$, 此时点 F 在 OA 的延长线上, 设 $F(x, y)$, 则 $\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = \frac{5}{12}$, 解得 $x = \frac{36}{5}, y = \frac{48}{5}$, 即 $F(\frac{36}{5}, \frac{48}{5})$.

15. (1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

【热题型】 正、余弦定理解三角形及三角形面积公式

【解】 (1) 第一步: 边角互化, 利用正弦定理把边化成角

因为 $a \sin B = -\sqrt{3} b \cos A$,

所以由正弦定理可得 $\sin A \sin B = -\sqrt{3} \sin B \cos A$ 2 分

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin A = -\sqrt{3} \cos A$, 故 $\tan A = -\sqrt{3}$ 4 分

第二步: 根据角 A 的正切值求角 A

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) 第一步: 已知角平分线长度可以利用三角形面积的关系求出 b, c 的关系

由题意可知 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$, 即 $\frac{1}{2} c \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} b \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} bc \sin \frac{2\pi}{3}$,

化简可得 $b+c=bc$ 9 分

第二步: 利用余弦定理求出 bc 的值

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$,

失分注意

容易忽视等号是否能够取得

失分注意

对于二项式定理, 套用公式时, 一定要注意各项系数的正负

高分关键

解决二项式问题时, 对等式两边进行求导是解决问题的有效方法

高分关键

根据 $|AF| = 7$ 或 3 判断出点 F 所在圆

高分关键

正确判断 F, O, A 三点的位置关系

第 1 问 6 分, 分成正切值 (4 分) 角 A (2 分) 两个部分给分

写出 $A \in (0, \pi)$ 得 1 分, 根据正切值求角给 1 分

第 2 问 7 分, 分成余弦定理 (4 分) 面积 (3 分) 两个部分给分

余弦定理, 给 1 分

从而 $\frac{(bc)^2 - 2bc - 20}{2bc} = -\frac{1}{2}$, 解得 $bc = 5$ 或 $bc = -4$ (舍). 12 分

第三步: 代入三角形面积公式, 求出 $S_{\triangle ABC}$

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ 13 分

16. (1) 见解析 (2) $(-\infty, \frac{1}{2})$

【热点】利用导数研究函数的单调性、极值

【解】(1) 第一步: 求导数并因式分解

当 $a = e$ 时, $f(x) = (x-2)e^{x-1} - ex^2 + 2ex$,

则 $f'(x) = (x-1)e^{x-1} - 2e(x-1) = (x-1)(e^{x-1} - 2e)$, 2 分

第二步: 求 $f'(x) = 0$ 的根, 并判断 $f'(x)$ 的符号, 得到 $f(x)$ 的单调性

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2 + \ln 2$ 4 分

令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < 2 + \ln 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2 + \ln 2)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > 2 + \ln 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(2 + \ln 2, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(2 + \ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 2 + \ln 2)$ 上单调递减. 7 分

(2) 第一步: 求导

$f'(x) = (x-1)e^{x-1} - 2a(x-1) = (x-1)(e^{x-1} - 2a)$ (提示: 对 a 的取值情况分类讨论). 8 分

第二步: 分别对 $a \leq 0$, $0 < a < \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{2}$ 的情况进行讨论

当 $a \leq 0$ 时, $e^{x-1} - 2a > 0$ 恒成立,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 符合题意. 9 分

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \ln(2a)$, 且 $x_1 > x_2$, 当 $1 + \ln(2a) < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 符合题意. 11 分

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = x_2 = 1$, 此时 $f'(x) \geq 0$ 恒成立且 $f'(x)$ 不恒为 0, $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 无极值, 不符合题意. 12 分

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \ln(2a)$, 且 $x_1 < x_2$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $1 < x < 1 + \ln(2a)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 不符合题意. 14 分

第三步: 得到实数 a 的取值范围

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 15 分

17. (1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{7}}{14}$

【热题型】线面垂直的判定、二面角的求解

(1) 【证明】第一步: 证明 $EF \perp$ 平面 PGB , 从而得到 $EF \perp PB$

连接 BD 分别交 EF, AC 于点 G, O , 连接 PG , 如图所示.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AC \perp BD$.

因为 $\frac{DE}{EC} = \frac{DF}{FA} = 2$ (提示: 三角形相似比), 所以 $EF \parallel AC$, 因此 $EF \perp BD$.

又 $AB = 2\sqrt{3}$, 所以 $PE = PF = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 因为 G 是 EF 的中点, 所以 $PG \perp EF$.

又 $BD \cap PG = G$, $BD, PG \subset$ 平面 PGB ,

所以 $EF \perp$ 平面 PGB . 又 $PB \subset$ 平面 PGB , 所以 $EF \perp PB$ 3 分

第二步: 证明 $PB \perp PG$, 从而得到 $PB \perp$ 平面 PEF

在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, 所以 $DO = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3$,

▶ 计算结果正确, 给 2 分

▶ 求出面积得 1 分

▶ 第(1)问 7 分, 分成求导(2 分)导数零点(2 分)单调性(3 分)三个部分给分

▶ 求导结果正确, 给 2 分, 无需因式分解

▶ 导数零点, 1 个 1 分, 全部正确给 2 分

▶ 正确书写单调性且区间连接正确, 给 3 分

▶ 第(2)问 8 分, 分成求导(1 分)分类讨论(6 分)结论(1 分)三个部分给分

▶ 对 $a \leq 0$ 进行分析, 结论正确, 给 1 分, 错误不得分

▶ 对 $0 < a < \frac{1}{2}$ 进行分析, 正确得到导数零点, 给 1 分; 结论正确, 给 1 分

▶ 对 $a = \frac{1}{2}$ 进行分析, 得到 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 给 1 分

▶ 对 $a > \frac{1}{2}$ 进行分析, 结论正确, 给 2 分

▶ 正确给出 a 的取值范围, 给 1 分, 不写不得分

▶ 第(1)问 7 分, 分成 $EF \perp PB$ (3 分) $PB \perp$ 平面 PEF (4 分) 两个部分给分

▶ 2 组线线垂直, 给 1 分

▶ 证明线面垂直且得到 $EF \perp PB$, 给 2 分; 不写 $BD \cap PG = G$, 给 1 分

▶ 线段长度, 给 2 分

所以 $PG=DG=\frac{2}{3}DO=2, BG=BD-DG=4,$

所以 $PG^2+PB^2=4+12=16=BG^2$, 所以 $PB \perp PG$.

又 $PG \cap EF=G, PG, EF \subset$ 平面 PEF , 所以 $PB \perp$ 平面 PEF 7 分

(2)【解】第一步:证明 $PO \perp$ 平面 $ABCD$

连接 PO , 在 $Rt\triangle GPB$ 中, $\tan \angle PGB=\sqrt{3} \Rightarrow \angle PGB=60^\circ, GO=1$.

在 $\triangle PGO$ 中, 由余弦定理得 $PO^2=1+4-2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ=3$, 解得 $PO=\sqrt{3}$,

所以 $PO^2+GO^2=PG^2$, 所以 $PO \perp GO$.

由(1)知, $EF \perp$ 平面 $PGB, PO \subset$ 平面 PGB , 所以 $PO \perp EF$,

又 $GO \cap EF=G, GO, EF \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 9 分

第二步:建立空间直角坐标系,写出各点及向量的坐标

如图,分别以 OA, OB, OP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 3, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), E(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1, 0)$,

所以 $\vec{AP}=(-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \vec{BP}=(0, -3, \sqrt{3}), \vec{EB}=(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 4, 0)$ 10 分

第三步:求平面 PAB 的法向量

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{AP}=0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{BP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0, \\ -3y_1+\sqrt{3}z_1=0. \end{cases}$ 令 $y_1=1$, 解得 $x_1=\sqrt{3}, z_1=\sqrt{3}$,

所以平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ 12 分

第四步:求平面 PEB 的法向量

设平面 PEB 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BP}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{EB}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3y_2+\sqrt{3}z_2=0, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_2+4y_2=0. \end{cases}$ 令 $y_2=1$, 解得 $x_2=-2\sqrt{3}, z_2=\sqrt{3}$,

所以平面 PEB 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(-2\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ 14 分

第五步:求二面角 $A-PB-E$ 的余弦值

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{7} \times \sqrt{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$, 显然二面角 $A-PB-E$ 为锐角,

故二面角 $A-PB-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{14}$ 15 分

18. (1) $y^2=3x$ (2) $8\sqrt{3}$ $Q(1, \pm\sqrt{3})$

【热考点】抛物线的方程与性质、直线与抛物线的位置关系

思路导引

(1) $\triangle OAB$ 为等腰三角形 \rightarrow 直线 $l \perp x$ 轴 $\xrightarrow{S_{\triangle OAB}=9}$ $|OM|=3 \rightarrow$ 点 A 的坐标 \rightarrow 抛物线方程;

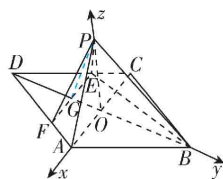
(2) 设直线 $l: x=my+n, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow{\text{与抛物线方程联立}}$ y_1+y_2, y_1y_2 $\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0 \rightarrow \frac{y_1^2y_2^2}{9}+y_1y_2=0 \end{array} \right\} \rightarrow n=3 \rightarrow$

$\begin{cases} l: x=my+3 \\ l': x=my-3 \end{cases}$ 已知条件 \rightarrow 点 Q 在 $l': x=my-1$ 上 $\xrightarrow{\text{设 } Q(x_0, y_0)}$ $x_0=my_0-1 = \frac{y_0^2}{3} \rightarrow |m| \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$|AB|=3\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{m^2+4}$, 点 Q 到直线 l 的距离 $d = \frac{4}{\sqrt{1+m^2}} \rightarrow S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d =$

$6\sqrt{m^2+4} \rightarrow S_{\triangle QAB}$ 的最小值及点 Q 的坐标

【解】(1) 第一步:求 OM 的长



- ▶ 勾股定理的逆定理, 给 1 分;
只写 $PB \perp PG$, 给 1 分
- ▶ $PB \perp$ 平面 PEF 结论正确, 给 1 分
- ▶ 第 2 问 8 分, 分成建系(3 分)
法向量(4 分)二面角(1 分)
三个部分给分
- ▶ 必要建系条件证明, 给 2 分;
不写不得分
- ▶ 向量的坐标书写正确, 给 1 分
注: 只写点的坐标或向量的
坐标都给分
- ▶ 平面的法向量正确, 给 2 分;
也可有其他合理答案, 均可
得分
- ▶ 平面的法向量正确, 给 2 分;
也可有其他合理答案, 均可
得分
- ▶ 二面角的余弦值, 结果正确给 1
分; 若正负号错误, 不得分

- ▶ 第(1)问 6 分, 分成直线 l 与
 x 轴垂直(2 分) $|OM|$ (2 分)
抛物线方程(2 分)三个部分
给分

如图,当 $\triangle OAB$ 为等腰三角形时,直线 l 与 x 轴垂直,
 2分
 此时 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形,设直线 l 与 x 轴的交点为 M ,

则 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times |OM| \times 2|OM| = |OM|^2$,
 所以 $|OM|^2 = 9$,即 $|OM| = 3$ 4分

第二步:求抛物线的方程

此时点 M 的坐标为 $M(3,0)$,点 A 的坐标为 $(3,3)$,
 将点 A 的坐标代入抛物线方程,得 $2p \times 3 = 9 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$,所

以抛物线 E 的方程为 $y^2 = 3x$ 6分

(2) 第一步:设直线 $l: x = my + n$,与抛物线方程联立,利用 $OA \perp OB$ 求出 n

设直线 $l: x = my + n$,与抛物线方程联立,并消去 x 得 $y^2 - 3my - 3n = 0$,则 $\Delta = 9m^2 + 12n > 0$.
 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则 $y_1 + y_2 = 3m, y_1 y_2 = -3n$.

因为 $y_1^2 = 3x_1, y_2^2 = 3x_2$,所以 $y_1^2 y_2^2 = 9x_1 x_2$,即 $x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{9} = n^2$.

由 $OA \perp OB$ 可得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

所以 $n^2 - 3n = 0$,解得 $n = 3$ 或 $n = 0$ (舍去), 10分

第二步:由 Q 到 l 的距离是 Q 到 l' 的距离的2倍,得到 Q 在直线 $l'': x = my - 1$ 上,从而得到

$$|m| \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故直线 $l: x = my + 3$,则 $l': x = my - 3$.

因为 Q 到 l 的距离是 Q 到 l' 的距离的2倍,所以当 $\triangle QAB$ 的面积取最小值时, Q 在直线 $l'': x = my - 1$ 上.

设 $Q(x_0, y_0)$,则 $x_0 = my_0 - 1 = \frac{y_0^2}{3}$,即 $m = \frac{y_0}{3} + \frac{1}{y_0}$,故 $|m| \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (当且仅当 $y_0^2 = 3$ 时取等号).

..... 13分

第三步:求 $\triangle QAB$ 面积的最小值及点 Q 坐标

因为 $|AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 3\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{m^2 + 4}$,

点 Q 到直线 l 的距离 $d = \frac{|x_0 - my_0 - 3|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4}{\sqrt{1+m^2}}$,

所以 $\triangle QAB$ 的面积 $S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = 6\sqrt{m^2 + 4} \geq 6\sqrt{\frac{4}{3} + 4} = 8\sqrt{3}$,

当且仅当 $\frac{y_0}{3} = \frac{1}{y_0}$,即 $y_0^2 = 3$ 时,取“=”,此时 $x_0 = 1, Q(1, \pm\sqrt{3})$ 17分

19. (1) $\frac{2}{81}$ (2) $\frac{40}{3^7}$ (3) 见解析

【热趋势】概率与数列的综合问题

(1) 【解】第一步:由 $S_5 = 30$,结合题意列出所有可能的情况

用1表示某轮猜中,用-1表示某轮猜错.

$S_5 = 30$,则前5轮猜灯谜的情况可以用数列表示为:

1,1,1,1,-1或1,1,1,-1,1或1,1,-1,1,1, 2分

第二步:求概率

故 $S_5 = 30$ 的概率 $p_1 = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$ 4分

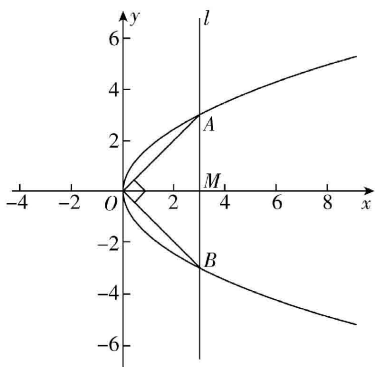
(2) 【解】第一步:由 $S_7 = 10$,结合题意列出所有可能的情况

$S_7 = 10$,则前7轮猜灯谜的情况可以用数列表示为:

1,1,1,1,-1,-1,-1或1,1,1,-1,1,-1,-1或1,1,-1,1,1,-1,-1或1,1,-1,1,-1,1,-1或1,1,1,-1,-1,1,-1, 7分

第二步:求出概率

故 $S_7 = 10$ 的概率 $p_2 = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{40}{3^7}$ 9分



▶ 没有强调直线 l 与 x 轴垂直,但设 A, B 两点坐标显示了垂直(横坐标设得相同),给2分

▶ OM 长度计算正确,给1分

▶ 正确书写抛物线方程,给2分;若方程错误, p 正确,给1分

▶ 第(2)问11分,分成求直线方程中的参数(4分)三角形面积的最小值及此时点 Q 坐标(7分)两个部分给分

▶ 计算正确 n 值,给1分;不取舍不扣分

▶ m 取值范围正确,给2分,无过程不扣分

▶ 点到直线的距离公式正确,给1分

▶ 三角形面积正确,给1分;其他表示形式,结果正确也给分

▶ 点 Q 坐标正确,给1分;错误不得分

▶ 第(1)问4分,分成前5轮情况表示(2分)概率(2分)两个部分给分

▶ 概率表达式正确,给1分;结果正确,给1分

▶ 第(2)问5分,分成前7轮情况表示(3分)概率(2分)两个部分给分

▶ 5种情况正确,给3分

注:未列出所有情况,概率求解正确,给5分

▶ 概率表达式正确,给1分;结果正确,给1分

(3)【证明】第一步:甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰,第一项是 1,最后一项是 -1,中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个

甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰,其比赛情况用 1,-1 表示得到的数列,第一项是 1,最后一项是 -1,中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,观察中间 $2n$ 项组成的新数列,记其前 k 项和为 T_k ,则 $T_k \geq 0$ 对 $k \in \{1,2,3,\dots,2n\}$ 恒成立.

由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个.

第二步:求出由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1,2,3,\dots,2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数为 C_{2n}^{n-1} ,从而得到中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$

现在考虑,由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1,2,3,\dots,2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数.不妨设满足 $T_k < 0$ 的 k 的最小值为 m ,则一定有 $T_m = -1$,且 m 为奇数,这个数列的前 m 项有 $\frac{m-1}{2}$ 个 1 和 $\frac{m+1}{2}$ 个 -1,将此数列的前 m 项中的 1 改成 -1,-1 改成 1,其他项不变,这样就得到了由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列;

反过来,由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列,因为其前 $2n$ 项和为 2,所以一定存在 k ,使得其前 k 项和大于 0,找到这样的 k 的最小值 m ,则前 m 项和为 1,且 m 为奇数,前 m 项中有 $\frac{m-1}{2}$ 个 -1 和 $\frac{m+1}{2}$ 个 1,将其前 m 项中的 -1 改成 1,1 改成 -1,其他项不变,则得到的数列是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,且 $T_m = -1 < 0$.

因此,由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1,2,3,\dots,2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数,等于由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列的个数,为 C_{2n}^{n-1} .

所以中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

第三步:求甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率

因此,甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率 $p_3 = (C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}) \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{2n+2}}$.

关键点拨 此题第(3)问的解题关键是利用间接法求甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率,因为中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个,而由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1,2,3,\dots,2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数为 C_{2n}^{n-1} ,所以中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

趋势预测 在 2024 年全国新课标卷中,题量减少,解答题由原来的 6 道题减少为 5 道题,但实际对模块知识的考查并没有减少,比如 2024 年全国新课标 II 卷中第 19 题出现双曲线与数列的融合,所以在解答题中,模块融合的题目会加强考查,综合性更强,考查知识的灵活运用能力.本题以猜灯谜作为命题背景,交汇考查了数列、概率与组合数.

试做反馈 第 19 题第(1)(2)问得分情况较好,部分学生可以拿满分,失分情况主要是在分析情况时不齐全导致概率计算出现错误;第(3)问涉及数列与概率的融合,难度系数高.

第(3)问 8 分,分成 $2+3+1+2$ 四部分给分

结果正确,给 2 分

转化正确,给 2 分;结果正确,给 1 分,共 3 分

结果正确,给 1 分

证得概率表达式,给 2 分

2025 年全国高考名校名师联席命制
 数学信息卷(二)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	B	D	C	A	B	B	D	A	AC	ACD	BCD	$y = -x + 1$	$2\sqrt{3}$	$-6 + 3e^3$

试做分析

一、整体情况

本卷组织河北省秦皇岛一中共计 209 名学生进行模拟测试,从整体来看,本套试卷覆盖了高中数学的主干内容,重视对数学思想方法的考查,体现新高考多思少算的命题思想.学生做题流畅度高,整体平均得分为 125.8 分,其中,最低分 89 分,最高分 150 分.

二、选择题

注重基础,同时兼顾创新.选择题平均得分 51.5 分,失分相对较严重的情况主要集中在第 7,8,10,11 题.第 7 题考查双曲线的离心率,利用余弦定理得到一元二次方程,由于粗心计算错误;第 11 题为抛物线与圆的综合,设题方式灵活,解析几何、数形结合法、代数运算相结合,类比 2024 年全国新课标 II 卷第 10 题的设题背景,考查全面.